Journal de la Société Française de Statistique
Vol. 154 No. 2 (2013)

# Éditorial du numéro spécial du journal de la SFdS sur la statistique des valeurs extrêmes

**Title:** Editorial to the special issue on extreme-value statistics of the SFdS Journal

Stéphane Girard[1]

## 1. Statistique des valeurs extrêmes univariées

L'objectif principal de la statistique des valeurs extrêmes est de proposer des estimateurs de quantiles extrêmes. Partant d'un échantillon $X_1,\dots,X_n$ de $n$ variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition commune $F$, il s'agit d'estimer le réel $q(\alpha_n)$ défini par

$$q(\alpha_n) = \bar{F}^{\leftarrow}(\alpha_n), \text{ avec } \alpha_n \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty,$$

où $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est une suite connue et $\bar{F}^{\leftarrow}(u) = \inf\{x,\ \bar{F}(x) \leq u\}$ est l'inverse généralisée de la fonction de survie $\bar{F} = 1-F$. Remarquons que $q(\alpha_n)$ est le quantile d'ordre $1-\alpha_n$ de la fonction de répartition $F$. Un problème similaire à l'estimation de $q(\alpha_n)$ est l'estimation de "petites probabilités" $p_n$. Autrement dit, pour une suite de réels $(x_n)$ fixée, on cherche à estimer la probabilité $p_n$ définie par

$$p_n = \bar{F}(x_n), \text{ avec } x_n \to \infty \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Ainsi, en hydrologie, disposant d'un échantillon de hauteurs d'un cours d'eau, deux questions se posent :

(1) quelle est la hauteur d'eau qui est atteinte ou dépassée pour une faible probabilité donnée ?
(2) pour une "grande" hauteur d'eau fixée, quelle est la probabilité d'observer une hauteur d'eau qui lui sera supérieure ?

Les questions (1) et (2) se rapportent donc respectivement à l'estimation d'un quantile extrême (ou niveau de retour en hydrologie) et d'une "petite probabilité" (période de retour en hydrologie ou probabilité de défaillance en fiabilité). L'estimation de quantiles extrêmes ou de "petites probabilités" est requise dans de nombreux autres domaines tels que la finance ou l'assurance. La difficulté réside dans le fait que l'on considère un ordre de quantile $\alpha_n \to 0$ ou de manière équivalente un niveau $x_n \to \infty$. En effet, si par exemple $n\alpha_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, il est clair que

$$\mathbb{P}(X_{n,n} < q(\alpha_n)) = F^n(q(\alpha_n)) = (1-\alpha_n)^n \to 1$$

[1] Inria Grenoble Rhône-Alpes & LJK, Inovallée, 655, avenue de l'Europe, Montbonnot, 38334 Saint-Ismier cedex
E-mail : stephane.girard@inria.fr

où $X_{1,n} \leq \ldots \leq X_{n,n}$ est l'échantillon ordonné associé à $X_1, \ldots, X_n$. La quantité $q(\alpha_n)$ n'appartient donc pas à l'intervalle de variation des observations. En conséquence, l'estimateur de $q(\alpha_n)$ ne peut être obtenu en inversant simplement la fonction de répartition empirique

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}\{X_i \leq x\},$$

car $\hat{F}_n(x) = 1$ pour $x \geq X_{n,n}$. Pour répondre aux questions (1) et (2), la théorie des valeurs extrêmes propose, entre autres, d'établir le comportement asymptotique du maximum $X_{n,n}$.

Le premier article de ce recueil *Extreme Value Analysis : an Introduction* par Myriam Charras-Garrido et Pascal Lezaud donne les principaux éléments de cette théorie ainsi que des indications sur leur utilisation en statistique. Le second article *Estimation de quantiles extrêmes pour les lois à queue de type Weibull : une synthèse bibliographique* par Laurent Gardes et Stéphane Girard se concentre sur la famille des lois à queue de type Weibull dont la fonction de survie $\bar{F}$ décroit vers zéro à vitesse exponentielle. Une application de la statistique des valeurs extrêmes univariées au calcul de niveaux de retour (question (1)) de pluies extrêmes est présentée dans l'article *Extreme Rainfall Analysis at Ungauged Sites in the South of France : Comparison of Three Approaches* par Julie Carreau, Luc Neppel, Patrick Arnaud et Philippe Cantet.

## 2. Statistique des valeurs extrêmes multivariées ou spatiales

Lorsque l'on s'intéresse aux extrêmes de variables aléatoires réelles $X_1, \ldots, X_n$, le résultat central de cette théorie est la convergence en loi du maximum $X_{n,n} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ convenablement normalisé vers une loi des valeurs extrêmes. La théorie des valeurs extrêmes multivariées ou spatiales étudie le cas où chaque $X_i$ est un vecteur aléatoire ou un processus. Elle établit alors la loi asymptotique des maxima calculés composante par composante. On montre facilement que les marginales univariées de cette loi asymptotique dite max-stable sont des lois des valeurs extrêmes univariées. L'intérêt et la difficulté du résultat de convergence multivarié réside dans la caractérisation de la dépendance entre ces marginales.

L'article *Measuring and modelling multivariate and spatial dependence of extremes* par Jean-Noël Bacro et Gwladys Toulemonde présente les principaux résultats récents concernant l'inférence et la modélisation de la dépendance entre réalisations extrêmes. L'article de Mathieu Ribatet intitulé *Spatial extremes : Max-stable processes at work* est focalisé sur l'étude des valeurs extrêmes spatiales. Il présente une revue de la littérature concernant les processus max-stables spatiaux et aborde les problèmes de mesure de dépendance, d'inférence, de sélection de modèles et de simulation. Une application de la statistique des valeurs extrêmes bivariées au calcul de périodes de retour (question (2)) est présentée dans l'article *Environmental data : multivariate Extreme Value Theory in practice* par Juan Juan Cai, Anne-Laure Fougères et Cécile Mercadier.

*Journal de la Société Française de Statistique*, **Vol. 154** No. 2 64-65
http://www.sfds.asso.fr/journal